# Лекция 12
# ОЦЕНКА СВЕРХУ И СНИЗУ ФУНКЦИЙ $|\sin z|$ И СПЕЦИАЛЬНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Напомним, что для функции $\sin z$ сопряженная диаграмма $\bar{D} = [-i, +i]$, опорная функция $K(\varphi) = |\sin\varphi|$, индикатриса роста $h(\varphi) = |\sin\varphi|$.

**Теорема 12.1.** Верны неравенства:

1) $|\sin z| \le e^{h(\varphi)r}, \quad z = re^{i\varphi}, \quad h(\varphi) = |\sin\varphi|$;

2) вне окрестностей $|z - k\pi| < \varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$ нулей $\sin z$

$$|\sin z| > A(\varepsilon)e^{h(\varphi)r}, \quad A(\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Доказательство. Первое неравенство достаточно установить для $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Так как

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}(e^{-r\sin\varphi}e^{ir\cos\varphi} - e^{r\sin\varphi}e^{-ir\cos\varphi}),$$

то $|\sin z| \le e^{r\sin\varphi}, \quad \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Докажем неравенство 2. Пусть опять $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, тогда

$$|\sin z| = \frac{e^{r\sin\varphi}}{2}|1 - e^{2iz}|.$$

Пусть $z = x + iy$, отсюда

$$|1 - e^{2iz}|^2 = (1 - e^{-2y}\cos 2x)^2 + (e^{-2y}\sin 2x)^2.$$

Если $0 \le y \le \delta$, а $x$ лежит вне интервалов $|x - k\pi| < \delta$, $k \in \mathbb{Z}$, то

$$x = k\pi + \tilde{x}, \quad \delta < \tilde{x} < \pi - \delta,$$

$$2x = 2k\pi + 2\tilde{x}, \quad 2\delta < 2\tilde{x} < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{3\pi}{2} < 2\tilde{x} < 2\pi - 2\delta.$$

Если $\dfrac{\pi}{2} \le 2\tilde{x} \le \dfrac{3\pi}{2}$, то $\left|1 - e^{2iz}\right| > 1 - e^{-2y}\cos 2\tilde{x} \ge 1$.

Итак, вне прямоугольников $G_k$: $|x - k\pi| < \delta$, $0 \le y < \delta$ в первом квадранте есть оценка

$$|\sin z| \ge B(\delta)e^{r\sin\varphi}, \quad B(\delta) = \frac{1}{2}\min\left[1,\ 1 - e^{-2\delta},\ e^{-2\delta}\sin 2\delta\right].$$

При малом $\delta > 0$ прямоугольники лежат внутри полуокружностей $|z - k\pi| < \varepsilon$, $y > 0$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Рассмотрим бесконечное произведение вида

$$L(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right), \quad 0 < \lambda_k \uparrow \infty, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{k}{\lambda_k} = \sigma < \infty.$$

***Плотностью последовательности*** $\{\lambda_k\}$ называется величина

$$\sigma = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{\lambda_k}.$$

**Теорема 12.2.** В угле $\varepsilon < \varphi < \pi - \varepsilon$, $\pi + \varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ равномерно относительно $\varphi$

$$\frac{\ln\left|L(re^{i\varphi})\right|}{r} \to \pi\sigma|\sin\varphi|, \quad r \to \infty.$$

Существуют окружности $|z| = r_k$, $r_k \uparrow \infty$, на которых верны неравенства

$$|L(re^{i\varphi})| > e^{[h(\varphi)-\varepsilon]r}, \qquad r = r_k, \quad k > k_0(\varepsilon).$$

Доказательство. Пусть $n(t)$ — число точек $\lambda_k < t$. Если $\lambda_k < t \le \lambda_{k+1}$, то

$$\frac{k}{\lambda_{k+1}} \le \frac{n(t)}{t} < \frac{k+1}{\lambda_k}.$$

Поэтому существует $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{n(t)}{t} = \sigma$ и $n(t) = \sigma t + t\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) \to 0$, $t \to \infty$.

Рассмотрим угол $\varepsilon < \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Для таких $\varphi$ имеем

$$\ln L(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right) = \int_0^{\infty}\ln\left(1 - \frac{z^2}{t^2}\right)dn(t) \quad \left(\begin{array}{c}\textbf{интеграл}\\ \textbf{Лебега—Стилтьеса}\end{array}\right),$$

тем самым

$$\ln L(z) = n(t)\ln\left(1 - \frac{z^2}{t^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty} - 2z^2\int_0^{+\infty}\frac{n(t)dt}{(t^2 - z^2)t} = -2z^2\int_0^{+\infty}\frac{n(t)}{t^2 - z^2}\frac{dt}{t} =$$

$$= -2z^2\sigma\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2 - z^2} - 2z^2\int_0^{+\infty}\frac{\varepsilon(t)dt}{t^2 - z^2}.$$

Имеем

$$-2z^2\sigma\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2-z^2}=-z^2\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2-z^2}=-z^2\sigma\frac{\pi i}{2}=-\pi\sigma iz.$$

Оценим интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{\varepsilon(t)dt}{t^2-z^2}$. Имеем

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{\varepsilon(t)dt}{t^2-z^2}\right|\le\int_0^{+\infty}\frac{|\varepsilon(t)|dt}{|t^2-z^2|}=\int_0^{R}\frac{|\varepsilon(t)|dt}{|t^2-z^2|}+\int_R^{|z|/2}\frac{|\varepsilon(t)|dt}{|t^2-z^2|}+\int_{|z|/2}^{+\infty}\frac{|\varepsilon(t)|dt}{|t^2-z^2|}.$$

По заданному $\delta>0$ выберем $R$ так, чтобы при $t\ge R\to|\varepsilon(t)|<\delta$. Поэтому

$$\int_R^{|z|/2}\frac{|\varepsilon(t)|dt}{|t^2-z^2|}\le\frac{\delta\frac{|z|}{2}}{|z|^2-\frac{|z|^2}{4}}=\frac{2\delta}{3|z|}.$$

Пусть $\sup\limits_{0\le t<+\infty}|\varepsilon(t)|=K$, тогда

$$\int_0^{R}\frac{|\varepsilon(t)|dt}{|t^2-z^2|}\le K\int_0^{R}\frac{dt}{|z|^2-t^2}\le\frac{K\cdot R}{|z|^2-R^2}.$$

Теперь оценим интеграл $\int_{|z|/2}^{+\infty}\frac{|\varepsilon(t)|dt}{|t^2-z^2|}$. Если $z$ лежит в угле $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, то $|t+z|\ge t$, $|t-z|\ge t\cdot\sin\varphi$, тогда, учитывая, что $|t^2-z^2|=|t-z|\cdot|t+z|$,

$$\int_{|z|/2}^{+\infty}\frac{|\varepsilon(t)|dt}{|t^2-z^2|}\le\delta\int_{|z|/2}^{+\infty}\frac{dt}{t^2\sin\varphi}=\frac{2\delta}{|z|\sin\varphi}.$$

В итоге получаем при $\varepsilon<\varphi<\frac{\pi}{2}$

$$\ln L(z)=-\pi\sigma iz+p(z)\cdot z,$$

где $|p(z)|\le\frac{4}{3}\delta+\frac{2K\cdot R|z|}{|z|^2-R^2}+\frac{4\delta}{\sin\varepsilon}$. При малом $\delta$ и большом $|z|$ величина $p(z)$ мала. Тем самым $\ln|L(z)|=\pi\sigma|\sin\varphi|r+o(1)\cdot r$, или

$$\frac{\ln|L(z)|}{r}=\pi\sigma|\sin\varphi|+o(1).$$

Отсюда следует, что индикатриса роста $h(\varphi)=\pi\sigma|\sin\varphi|$, $\varphi\ne0$, $\varphi\ne\pi$, но $h(\varphi)$ есть функция непрерывная, поэтому для всех $\varphi\in[0,2\pi]$ индикатриса роста $h(\varphi)=\pi\sigma|\sin\varphi|$. Так как $h(0)=0$, то из определения индикатрисы роста следует, что существует последовательность $\{r_k\}$, $r_k \uparrow +\infty$ такая, что

$$\left|L(r_k)\right| > e^{-\varepsilon_k r_k}, \quad 0 < \varepsilon_k \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Пусть $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ таково, что $\pi\sigma\sin\varepsilon < \delta/2$. Тогда при $\varepsilon < |\varphi| < \pi - \varepsilon$ имеем

$$\left|L(r_k e^{i\varphi})\right| > e^{(\pi\sigma|\sin\varphi| - \delta)r_k}, \quad k > k_0(\delta).$$

В угле $|\varphi| \le \varepsilon$ получим

$$\left|L(r_k e^{i\varphi})\right| = \prod_{m=1}^{\infty}\left|1 - \frac{z^2}{\lambda_m^2}\right| \ge \prod_{m=1}^{\infty}\left|1 - \frac{r_k^2}{\lambda_m^2}\right| = \left|L(r_k)\right| \ge e^{-\varepsilon_k r_k} > e^{-\frac{\delta}{2}r_k}, \quad k \ge k_1(\delta).$$

В угле $|\varphi| \le \varepsilon$ имеем оценку

$$\pi\sigma|\sin\varphi| - \delta \le -\delta/2,$$

таким образом,

$$\left|L(r_k e^{i\varphi})\right| \ge e^{(\pi\sigma|\sin\varphi| - \delta)r_k}, \quad |\varphi| \le \varepsilon, \;\; k > k_1(\delta),$$

Окончательно имеем: на окружностях $|z| = r_k$ справедливы неравенства

$$\left|L(r_k e^{i\varphi})\right| > e^{(\pi\sigma|\sin\varphi| - \delta)r_k}, \quad k > \max(k_1, k_0). \quad ■$$